Exercice 4 Antilles – Guyane, Septembre 2007 (4 points)

Soit $v = (v_n)_{n\geqslant 0}$ une suite.
On considère la suite u définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = \mathrm{e}^{-v_n} + 1$.

Partie A

Pour chacune des questions, quatre propositions sont proposées dont une seule est exacte.
Pour chacune des questions, donner, sans justification, la bonne réponse sur votre copie.
Une bonne réponse donne 0,75 *point, une mauvaise réponse enlève* 0,25 *point et l'absence de réponse est comptée* 0 *point.*
Tout total négatif est ramené à zéro.

1. a est un réel strictement positif et ln désigne la fonction logarithme népérien.
   Si $v_0 = \ln a$ alors :
   a. $u_0 = \dfrac{1}{a} + 1$ b. $u_0 = \dfrac{1}{1+a}$ c. $u_0 = -a + 1$ d. $u_0 = \mathrm{e}^{-a} + 1$
2. Si v est strictement croissante, alors :
   a. u est strictement décroissante et majorée par 2
   b. u est strictement croissante et minorée par 1
   c. u est strictement croissante et majorée par 2
   d. u est strictement décroissante et minorée par 1
3. Si v diverge vers $+\infty$, alors :
   a. u converge vers 2
   b. u diverge vers $+\infty$
   c. u converge vers 1
   d. u converge vers un réel ℓ tel que $\ell > 1$
4. Si v est majorée par 2, alors :
   a. u est majorée par $1 + \mathrm{e}^{-2}$
   b. u est minorée par $1 + \mathrm{e}^{-2}$
   c. u est majorée par $1 + \mathrm{e}^{2}$
   d. u est minorée par $1 + \mathrm{e}^{2}$

Partie B (1 point)

Démontrer que, pour tout entier naturel non nul, on a : $\ln(u_n) + v_n > 0$.

Exemple : $v_n = 2 - \frac{1}{n+1}$ pour $n \geq 0$.
Examiner les différents items du QCM.