LEGT Robert SCHUMAN - Haguenau

BAC BLANC – Février 2012

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
Terminales S – Enseignement obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5

La page 5 est une annexe concernant les exercices 1 et 2
Elle devra être complétée et rendue avec la copie

L'usage de la calculatrice est autorisé

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (4 points)

1. Résoudre l'équation $(z-8)(z^2-4z+16)=0$ dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,,\,\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=8$, $z_B=2+2i\sqrt{3}$ et $z_C=2-2i\sqrt{3}$.

- **a.** Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes z_A, z_B et z_C.
- **b.** Faire une figure sur le graphique fourni en annexe.
- **c.** Quelle est la nature du triangle OAB ? Le démontrer.
- **d.** Donner une mesure en radian de chacun des angles du triangle OAB (justifier).
- **e.** Quelle est la nature du triangle ABC ? Le démontrer.

3. Soit D le point d'affixe $\frac{z_A}{z_B}$. Prouver que D est le milieu de $[OC]$.

Exercice 2 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $]0\,;1]$ par : $f(x) = 1 + x\ln x$
On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Question de cours

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et on cherche à trouver $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$:

a. En posant $X = \frac{1}{x}$, justifier que $x\ln x = -\frac{\ln X}{X}$.

b. En déduire $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$

2. a. Préciser la limite de la fonction f en 0.

b. Etudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation.

c. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 ; placer T sur la figure fournie en annexe.

3. Soit g la fonction définie sur $]0\,;1]$ par :

$$g(x) = 1 + x\ln x - x$$

a. Préciser la limite de la fonction g en 0.

b. Etudier le sens de variation de la fonction g et dresser son tableau de variation.

c. Donner le signe de g sur $]0\,;1]$.

d. En déduire les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite T sur $]0;1]$.

4. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{e}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Calculer la valeur exacte de u_1 ; vérifier que $u_0 < u_1$.

b. Montrer, par récurrence, que pour tout $n \geq 0$, $\frac{1}{e} \leq u_n \leq 1$.

c. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

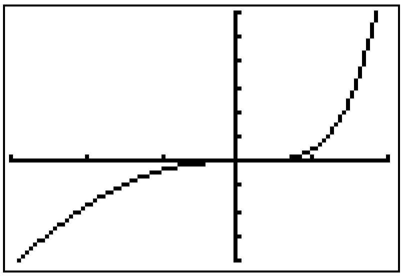
d. Justifier que la suite (u_n) est convergente, et déterminer sa limite.

Exercice 3 (6 points)

On considère la fonction numérique définie sur par :

—

1. **Premières conjectures**

   Le graphique ci-contre est la courbe représentative de affichée par une calculatrice dans la fenêtre ; .
   A l'observation de cette courbe, quelles conjectures proposez-vous concernant :
   a. Le sens de variation de sur l'intervalle ?
   b. La position de la courbe par rapport à l'axe des abscisses ?

2. **Étude d'une fonction**
   Soit la fonction définie sur par :
   a. Calculer la limite de quand tend vers
   b. Justifier que − et en déduire la limite de quand tend vers .
   c. Calculer et étudier son signe suivant les valeurs de x.
   d. Dresser le tableau de variation de .

3. **Signe de**
   a. Montrer que l'équation possède une unique solution dans .
   b. Donner un encadrement de à près.
   c. Préciser le signe de suivant les valeurs de .

4. **Étude de la fonction**
   a. Calculer et vérifier que pour tout réel ,
   b. Etudier le signe de suivant les valeurs de .
   c. En déduire le tableau de variation de la fonction (on ne demande pas les limites de en et en).
   d. Que pensez-vous de vos conjectures initiales ?

5. **Retour au graphique**
   a. On veut représenter, sur l'écran d'une calculatrice, la courbe de sur l'intervalle de façon à visualiser les résultats de la question 2c.
   Quelles valeurs extrêmes de l'ordonnée peut-on choisir pour la fenêtre de la calculatrice ?
   b. Reproduire sur votre copie l'allure de la figure affichée dans la fenêtre choisie.

$\boxed{\text{Exercice 4}}$ (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n}{3u_n+5} \end{cases}$

1. **a.** Montrer que pour tout $n \geq 0$, $u_n > 0$.

b. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} - u_n = \frac{-3{u_n}^2}{3u_n+5}$

En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

c. Justifier que la suite (u_n) est convergente.

d. On note $\ell = \lim u_n$

Justifier que ℓ est solution de l'équation $\ell = \frac{5\ell}{3\ell+5}$ et calculer ℓ.

2. Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \geq 0$ par $v_n = \frac{5}{u_n}$.

a. Calculer v_0 , v_1 , v_2.

b. Montrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison 3.

c. Exprimer v_n en fonction de n.

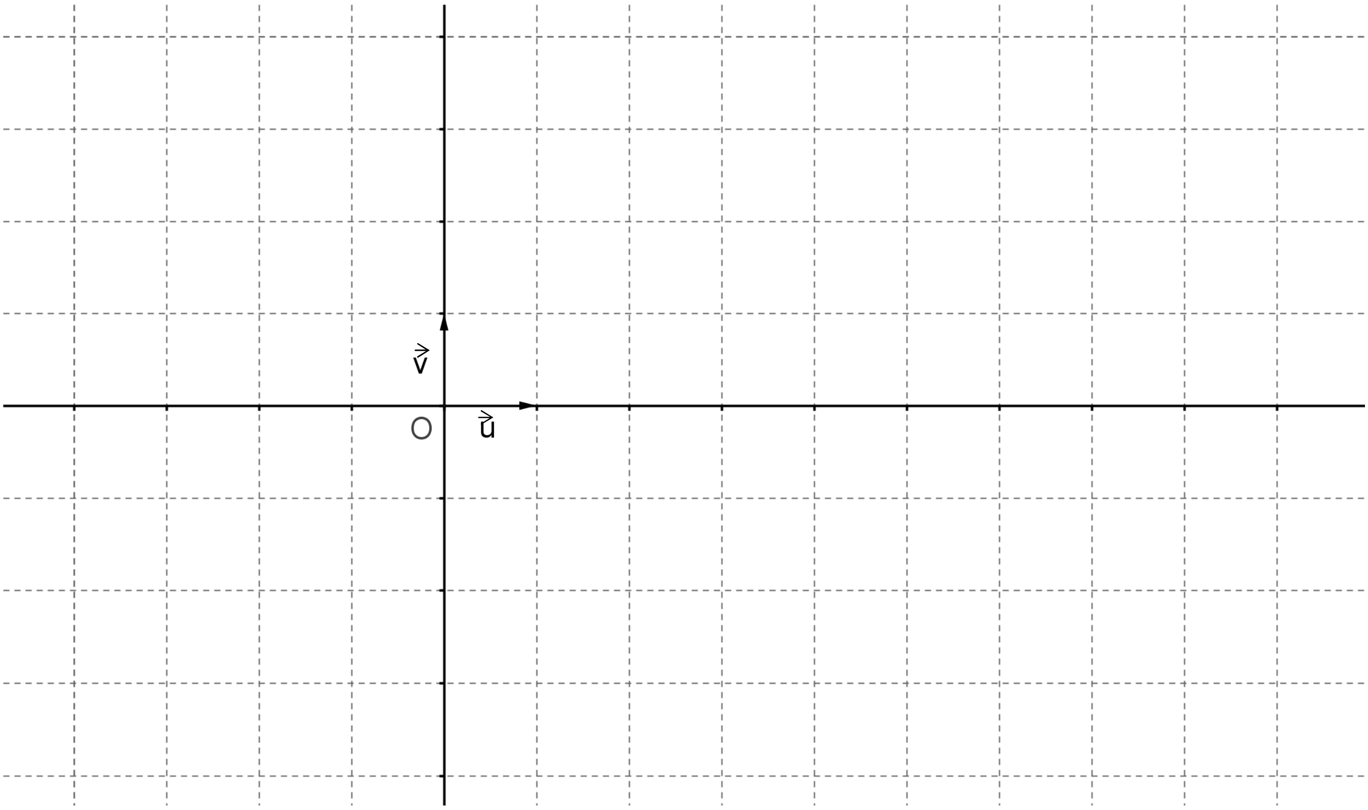
En déduire u_n en fonction de n.

d. Retrouver alors que la suite (u_n) est convergente, ainsi que sa limite ℓ.

Nom :
Prénom :
Classe :

Annexe à rendre avec la copie

Exercice 1



Exercice 2