Equation différentielle 1 : Etude d'une solution de l'équation (E) : $y - 2y' = 3$

1. Montrer que la fonction h, constante et telle que $h(x) = 3$, est une solution de l'équation (E)

$h(x) = 3$ et $h'(x) = 0$, donc $h(x) - 2h'(x) = 3$; h est donc solution de (E).

2. Trouver toutes les solutions f de l'équation (E).

L'équation (E) s'écrit aussi : $y - 3 = 2y'$ ou encore $y' = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}$

Les solutions de l'équation (E) sont donc les fonctions f telles que :

$f(x) = ke^{\frac{1}{2}x} + 3$ sur $]-\infty; +\infty[$.

3. Trouver la solution g de (E) telle que $g(0) = 0$.

$g(x) = ke^{\frac{1}{2}x} + 3$ et $g(0) = ke^{\frac{1}{2}\times 0} + 3 = k + 3$; $g(0) = 0$ donne alors $k = -3$.

La solution g cherchée vérifie donc : $g(x) = -3e^{\frac{1}{2}x} + 3$, pour tout x.

4. Dresser le tableau des variations de g en indiquant, sans calculs, les limites en $+\infty$ et en $-\infty$.

$g'(x) = -\frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}x}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$-\frac{3}{2}$		$-$	
$e^{\frac{1}{2}x}$		$+$	
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	3	$\searrow$	$-\infty$

Equation différentielle 2 :

On considère la fonction f, dérivable sur $]-\infty; +\infty[$, vérifiant :

$f'(x) = -f(x)[2 - f(x)]$, pour tout réel x et $f(0) = \frac{2}{3}$

Soit l'équation différentielle (E) : $y' = 2y - 1$

1. Montrer que la fonction $g = \frac{1}{f}$ est solution de l'équation différentielle (E).

$g(x) = \frac{1}{f(x)}$ $\quad g'(x) = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = \frac{f(x)[2-f(x)]}{[f(x)]^2} = \frac{2f(x)-[f(x)]^2}{[f(x)]^2} = \frac{2}{f(x)} - 1 = 2g(x) - 1$

La fonction g est donc solution de l'équation différentielle (E).

2. Résoudre l'équation (E) ; en déduire que : $f(x) = \frac{2}{2e^{2x}+1}$, pour tout réel x.

Les solutions de l'équation différentielle $y' = 2y - 1$ sont les fonctions h qui s'expriment par $h(x) = ke^{2x} + \frac{1}{2}$; on aura donc $g(x) = ke^{2x} + \frac{1}{2}$; comme $g(0) = \frac{1}{f(0)} = \frac{3}{2}$; on obtient : $ke^{2\times 0} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, c'est-à-dire $k = 1$; on obtient donc $g(x) = e^{2x} + \frac{1}{2}$.

Finalement : $f(x) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{e^{2x}+\frac{1}{2}} = \frac{2}{2e^{2x}+1}$ sur $]-\infty; +\infty[$.

Fonction ln :

1. Exprimer en fonction de $ln3$ et de $ln7$:

$a = ln\sqrt{63}$ $\quad b = ln(105) - ln(45)$ $\quad c = ln(49) + 2\,ln\frac{3}{7}$ $\quad d = ln(189) - 2ln\sqrt{\frac{77}{99}}$

$a = \frac{1}{2}ln(9 \times 7) = \frac{1}{2}[ln9 + ln7] = \frac{1}{2} \times 2ln3 + \frac{1}{2}ln7 = ln3 + \frac{1}{2}ln7$

$b = ln\frac{105}{45} = ln\frac{7}{3} = ln7 - ln3$ $\quad c = ln(49) + 2\,ln\frac{3}{7} = 2ln7 + 2ln3 - 2ln7 = 2ln3$

$d = ln(7 \times 27) - ln\frac{77}{99} = ln7 + 3ln3 - ln\frac{7}{9} = ln7 + 3ln3 - ln7 + ln9 = 3ln3 + 2ln3 = 5ln3$

2. Résoudre les équations : $ln(2-x)=1$ $\quad ln(x^2-3)=0$ $\quad e^{5-2x}=4$

$ln(2-x)=lne \qquad 2-x=e \qquad x=2-e \qquad S=\{2-e\}$

$ln(x^2-3)=ln1 \qquad x^2-3=1 \qquad x^2=4 \qquad S=\{-2;2\}$

$e^{5-2x}=e^{ln4} \qquad 5-2x=ln4 \qquad 2x=5-ln4 \qquad x=\frac{5}{2}-ln2$

3. Il s'agit de résoudre l'inéquation : $\ln(x-3)+\ln(x-1)\leq \ln(3)$

a. Sur quel intervalle I doit-on chercher les solutions ?

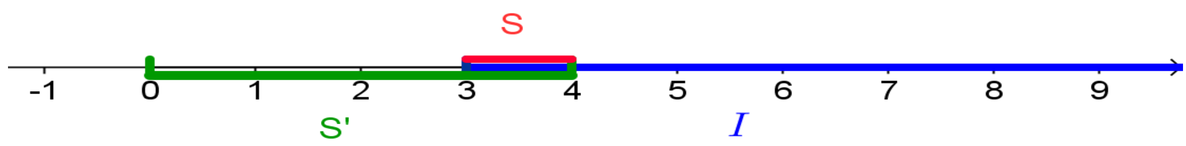
$x-3>0$ et $x-1>0 \qquad x>3$ et $x>1 \qquad \boldsymbol{I}=]\mathbf{3};+\infty[$

b. Résoudre l'inéquation et donner l'intervalle solution S.

$ln[(x-3)(x-1)]\leq ln3 \qquad (x-3)(x-1)\leq 3 \qquad x^2-4x\leq 0 \qquad x(x-4)\leq 0 \qquad \mathbf{0\leq x\leq 4}$

Compte tenu de $\boldsymbol{I}=]\mathbf{3};+\infty[$, on obtient : $S=]3;4]$.

Représenter en couleurs, sur le même axe, les intervalles I et S :



4. On considère la fonction f définie par $f(x)=lnx-\frac{1}{e}x$ sur $]0;+\infty[$.

NB : On rappelle que $e=exp(1)\cong 2{,}718$

a. Trouver l'équation de la tangente T_e à la courbe $y=lnx$ au point d'abscisse e

$y=ln'(e)(x-e)+lne \qquad y=\frac{1}{e}(x-e)+1 \qquad y=\frac{1}{e}x$

b. Dresser le tableau des variations de la fonction f (sans les limites)

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}=\frac{e-x}{ex}$

x	0		e		$+\infty$
$e-x$		$+$	0	$-$	
ex	0	$+$	e^2	$+$	
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

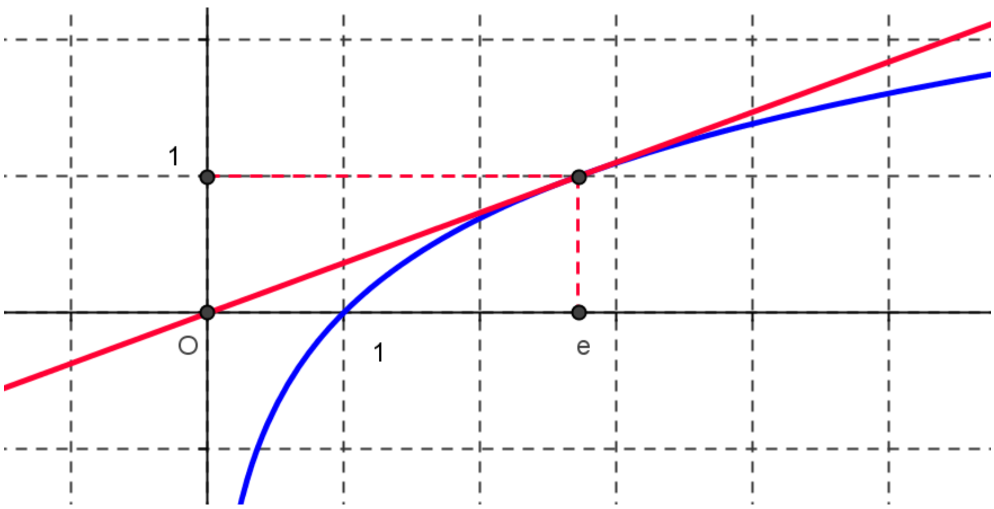
c. Comment déduire du b. la position de la courbe $y=ln(x)$ et de la droite T_e ?

D'après le tableau de variations du b., $f(x)\leq 0$ sur $]0;+\infty[$.

On a donc $lnx-\frac{1}{e}x\leq 0$ ou encore $lnx\leq\frac{1}{e}x$ sur $]0;+\infty[$.

La courbe $y=lnx$ est donc située sous la tangente T_e sur $]0;+\infty[$.

d. Faire un schéma de la courbe $y=ln(x)$ et de cette tangente T_e dans un repère d'unité 1 cm.



5. On considère la fonction f définie par $f(x) = xlnx$ sur $]0; +\infty[$.

a. Etudier les variations de la fonction f et en dresser le tableau.

Indiquer les limites en 0 et en $+\infty$ sachant que : $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

$f'(x) = 1 \times lnx + x \times \frac{1}{x} = lnx + 1$

On cherche le signe de $f'(x)$: $lnx + 1 \geq 0 \quad lnx \geq -1 \quad lnx \geq ln\frac{1}{e} \quad x \geq \frac{1}{e}$

x	0		$\frac{1}{e}$		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0			$+$	
$f(x)$	‖ 0	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

b. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α .

D'après le tableau de variations :

-L'équation $f(x) = 0$ n'a aucune solution sur $\left]0; \frac{1}{e}\right]$

- l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α sur $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right[$

L'équation $f(x) = 0$ a donc une solution unique α sur $]0; +\infty[$

c. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ pour trouver la valeur exacte de α.

$xlnx = 0 \overset{\text{équivaut à}}{\Longleftrightarrow}$ à $x = 0$ ou $lnx = 0$

Or $x = 0$ est une valeur impossible ; il reste donc $lnx = 0$ c'est-à-dire $x = 1$.

On a donc $\alpha = 1$.