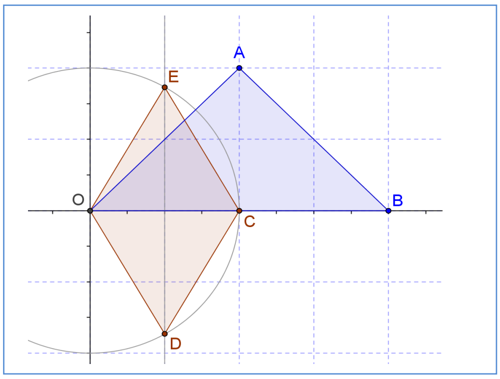
Complexes

1. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z : $\frac{z-4}{z}=i$ $z-4=iz$ $z=\frac{4}{1-i}=\frac{4(1+i)}{2}=2+2i$
   On appelle a la solution ; on appelle A le point d'affixe a. $a=2+2i$
2. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z : $z^2-2z+4=0$. $d=\frac{2-2i\sqrt{3}}{2}=1-i\sqrt{3}$ $e=1+i\sqrt{3}$
   On appelle d et e les solutions ; on appelle D et E les points d'affixes d et e.
3. Les points B et C ont pour affixes respectives : $b=4$ et $c=2$
   Placer les points A, B, C D et E dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.



4. Quelle est la nature du triangle OAB ?

$\overrightarrow{OA}(2+2i)$ $OA^2=4+4$ $OA=2\sqrt{2}$ $\overrightarrow{OB}(4)$ $OB^2=16$ $OB=4$ $\overrightarrow{AB}(2-2i)$ $AB^2=8$ $AB=2\sqrt{2}$	$OA^2+AB^2=OB^2$ Le triangle OAB est rectangle en A De plus OA=AB Le triangle OAB est donc rectangle en A et isocèle

Quelle est la nature du quadrilatère OECD ?
$\overrightarrow{OE}(1+i\sqrt{3})$ et $\overrightarrow{DC}(1+i\sqrt{3})$ donc $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{DC}$ et le quadrilatère OECD est un parallélogramme
De plus : $\overrightarrow{OE}(1+i\sqrt{3})$ $\overrightarrow{OD}(1-i\sqrt{3})$, $OE^2=OD^2=4$, c'est-à-dire OE=OD=2
Le quadrilatère OECD est un parallélogramme qui a 2 côtés consécutifs, donc les 4 côtés, de même longueur.
C'est un losange.

Fonction exponentielle

1. Résoudre les équations : $e^x-e^{2x-1}=0$ $\quad e^{2x-1}\geq\sqrt{e}$ $\quad e^{-3x}<\frac{e^x}{e^3}$ $\quad e^{\frac{2x-1}{3x+1}}\geq\frac{1}{e^2}$

$e^x-e^{2x-1}=0$ $\quad e^x=e^{2x-1}$ $\quad x=2x-1$ $\quad x=1$ $\quad S=\{1\}$

$e^{2x-1}\geq\sqrt{e}$ $\quad e^{2x-1}\geq e^{1/2}$ $\quad 2x-1\geq\frac{1}{2}$ $\quad x\geq\frac{3}{4}$ $\quad S=\left[-\frac{1}{8};+\infty\right[$

$e^{-3x}<\frac{e^x}{e^3}$ $\quad e^{-3x}<e^{x-3}$ $\quad -3x<x-3$ $\quad x>\frac{3}{4}$ $\quad S=\left]\frac{3}{4};+\infty\right[$

$e^{\frac{2x-1}{3x+1}}\geq\frac{1}{e^2}$ $\quad e^{\frac{2x-1}{3x+1}}\geq e^{-2}$ $\quad \frac{2x-1}{3x+1}\geq-2$ $\quad \frac{2x-1}{3x+1}+2\geq0$ $\quad \frac{8x+1}{3x+1}\geq0$ $\xRightarrow{\text{tableau de signes}}$ $S=\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right[\cup\left[-\frac{1}{8};+\infty\right[$

2. Dresser le tableau des variations, sur $]-\infty;+\infty[$ de la fonction f : $f(x)=(2x+1)e^{-x}$
$f'(x)=2e^{-x}-(2x+1)e^{-x}=(1-2x)e^{-x}$

x	$-\infty$		½		$+\infty$
$1-2x$		+	0	−	
e^{-x}		+		+	
$f'(x)$		+		−	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{2}{\sqrt{e}}$	↘	0

Une suite récurrente

La suite (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3 \end{cases}$ pour $n \geq 0$.

a. Ecrire un algorithme permettant d'afficher les 10 1ères valeurs de cette suite.
Imprimer sa traduction sur Algobox.
Donner ces 10 1ères valeurs.

b. Montrer que : $1 \leq u_n \leq 4$ pour tout $n \geq 0$ $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \frac{1}{4}x + 3$; puis récurrence avec f croissante

c. Montrer que la suite (v_n) définie, pour $n \geq 0$, par : $v_n = u_n - 4$ est une suite géométrique.
$v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = \frac{1}{4}u_n + 3 - 4 = \frac{1}{4}u_n - 1 = \frac{1}{4}(u_n - 4) = \frac{1}{4}v_n$: la suite (v_n) est géométrique de raison 1/4

d. Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n, pour tout entier naturel n.
$v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = -3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$ et $u_n = v_n + 4 = 4 - 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$

e. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
$u_{n+1} - u_n = \left[4 - 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right] - \left[4 - 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] = 3 \times \left[\left(\frac{1}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right] = 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \left[1 - \frac{1}{4}\right] = \frac{9}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n > 0$ pour tout n
factoriser pour avoir le signe

Calculs de sommes :

1. On définit la somme s_n par $s_n = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + n(n+1)$, pour $n \geq 1$.

a. Calculer s_1, s_2, s_3, s_4 et s_5

b. Exprimer $s_{n+1} = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + n(n+1) + (n+1)(n+2) = s_n + (n+1)(n+2)$, en fonction de s_n

c. Montrer que $s_n = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$, pour tout $n \geq 1$ Par récurrence :

hérédité : Supposons $s_n = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$, pour un entier $n \geq 1$ quelconque
$s_{n+1} = s_n + (n+1)(n+2)$ et donc $s_{n+1} = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2)$
$s_{n+1} = (n+1)(n+2)\left[\frac{1}{3}n + 1\right] = \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)$ et l'hérédité est démontrée

2. La suite (u_n) est définie par : $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ pour $n \geq 0$.

a. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3

b. Calculer u_n en fonction de n : somme des termes d'une suite géométrique : $u_n = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2 - \frac{1}{2^n}$

c. Montrer que la suite (u_n) est croissante
<u>ou bien</u> $u_{n+1} - u_n = \left[2 - \frac{1}{2^{n+1}}\right] - \left[2 - \frac{1}{2^n}\right] = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}\left[1 - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2^{n+1}} > 0$ pour tout $n \geq 0$.
factoriser pour avoir le signe
<u>ou bien</u> $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2^{n+1}}$ et donc $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2^{n+1}}$, etc …..