

Equation différentielle : (E) : $x f'(x) - (2x + 1) f(x) = 8x^2$

1. Solutions de l'équation différentielle (E_0) : $h(x) = ke^{2x} - 4$
2. Soit f une solution de (E).
 - a. On a (E) : $xf'(x) - (2x + 1)f(x) = 8x^2$ donc $xf'(x) - 2xf(x) - f(x) = 8x^2$ et aussi : $xf'(x) - f(x) = 2xf(x) + 8x^2$
 - b. Soit g la fonction alors définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$
 $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$ et $xf'(x) - f(x) = 2xf(x) + 8x^2$ d'après a.
 donc $g'(x) = \frac{2xf(x) + 8x^2}{x^2} = 2\frac{f(x)}{x} + 8 = 2g(x) + 8$
 La fonction g est donc solution de l'équation (E_0)
3. a. g est solution de l'équation (E_0), donc $g(x) = ke^{2x} - 4$
 Si f est solution de (E), on a alors $\frac{f(x)}{x} = ke^{2x} - 4$, c'est-à-dire $f(x) = kxe^{2x} - 4x$
- b. $f(\ln 2) = 0$ se traduit donc par $k \times \ln(2) \times e^{2\ln 2} - 4 \times \ln 2 = 0$
 Avec $e^{2\ln 2} = 4$, on obtient $4k \ln(2) = 4 \ln(2)$ ou $k = 1$
 On a donc, finalement : $f_0(x) = xe^{2x} - 4x$ sur $]0; +\infty[$

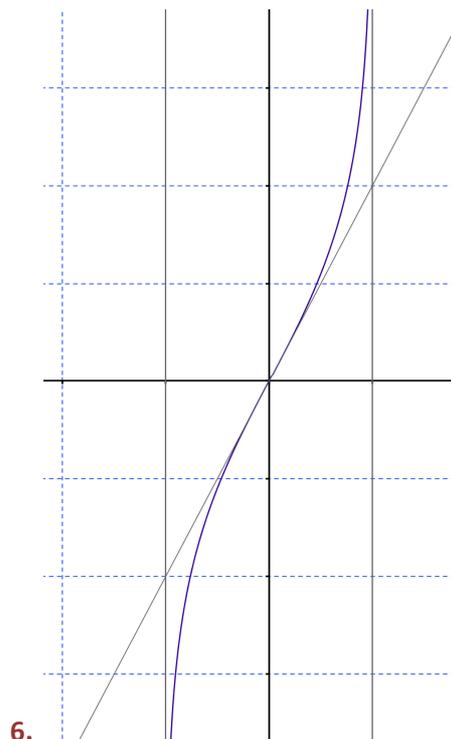
Etude d'une fonction avec ln :

On considère la fonction f définie sur $] -1; 1[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$.

1. $f(-x) = \ln\left(\frac{-x+1}{1+x}\right) = -\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right) = -f(x)$ sur $] -1; 1[$ - La fonction f est impaire.
2. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$: les droites $x = -1$ et $x = 1$ sont donc asymptotes verticales à la courbe $y = f(x)$.
3. $f'(x) = \frac{(1-x)+(x+1)}{(1-x)^2} \times \frac{1-x}{1+x} = \frac{2}{1-x^2}$ sur $] -1; 1[$. Le signe de $f'(x)$ est le signe de $1 - x^2$.

x	-1	0	1
$f'(x)$		0 +	
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

5. Equation de la tangente T_0 : $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ $y = 2x$



6.