Equation différentielle : $(E) : x\,f\,'(x) - (2x\ + 1)\,f\,(x)\ =\ 8x^2$

1. Solutions de l'équation différentielle (E_0) : $h(x) = ke^{2x} - 4$
2. Soit f une solution de (E).
   a. On a (E) : $xf'(x) - (2x\ + 1)\,f\,(x)\ =\ 8x^2$ donc $x\,f'(x) - 2xf(x) -\ f\,(x)\ =\ 8x^2$
   et aussi : $xf'(x) - f(x) = 2xf(x) +\ 8x^2$
   b. Soit g la fonction alors définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g\,(x)\ = \frac{f\,(x)}{x}$
   $g'(x) = \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$ et $xf'(x) - f(x) = 2xf(x) +\ 8x^2$ d'après a.
   donc $g'(x) = \frac{2xf(x)+8x^2}{x^2} = 2\frac{f(x)}{x} + 8 = 2g(x) + 8$
   La fonction g est donc solution de l'équation (E_0)
3. **a.** g est solution de l'équation (E_0), donc $g(x) = ke^{2x} - 4$
   Si f est solution de (E), on a alors $\frac{f\,(x)}{x} = ke^{2x} - 4$, c'est-à-dire $f(x) = kxe^{2x} - 4x$
   b. $f(ln2) = 0$ se traduit donc par $k \times ln(2) \times e^{2ln2} - 4 \times ln2 = 0$
   Avec $e^{2ln2} = 4$, on obtient $4kln(2) = 4\ln(2)$ ou $k = 1$
   On a donc, finalement : $f_0(x) = xe^{2x} - 4x$ sur $]0; +\infty[$

Etude d'une fonction avec ln :

On considère la fonction f définie sur $]-1; 1[$ par $f(x) = ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$.

1. $f(-x) = ln\left(\frac{-x+1}{1+x}\right) = -ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right) = -f(x)$ sur $]-1; 1[$ - La fonction f est impaire.

2. $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to1} f(x) = +\infty$: les droites $x = -1$ et $x = 1$ sont donc asymptotes verticales à la courbe $y = f(x)$.

3. $f'(x) = \frac{(1-x)+(x+1)}{(1-x)^2} \times \frac{1-x}{1+x} = \frac{2}{1-x^2}$ sur $]-1; 1[$. Le signe de $f'(x)$ est le signe de $1 - x^2$.

x	-1	0	1
$f'(x)$	‖	0 +	‖
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗ 0 ↗	$+\infty$ ‖

5. Equation de la tangente $T_0 : y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ $\quad y = 2x$

6.