Devoir maison 6 - Pour le vendredi 6/01/12

Equation différentielle :

On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ vérifiant l'équation différentielle :

$$(E) : x\,f\,'(x) - (2x\ + 1)\,f\,(x)\ =\ 8x^2$$

1. Trouver toutes les fonctions h , définies sur $]0\ ;\ +\infty[$, et solutions de l'équation différentielle $(E_0) :\ \ y' =\ 2y\ + 8$

2. Soit f une solution de (E).
   a. Montrer que : $x\,f'(x) - f(x) = 2xf(x) +\ 8x^2$
   b. Soit g la fonction alors définie sur $]0\ ;\ +\infty[\ \text{ par } g\,(x)\ = \frac{f\,(x)}{x}$
   Calculer $g'(x)$ en fonction de x et de $f(x)$
   Montrer que g est solution de (E_0)

3. **a.** Déduire du **1.** et du **2.** toutes les solutions f de (E).
   b. Trouver la solution f_0 de (E) vérifiant $f_0(ln2) = 0$

Etude d'une fonction avec ln :

On considère la fonction f définie sur $]-1;1[$ par $f(x) = ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$.

1. Montrer que $f(-x) = -f(x)$ sur $]-1;1[$.
   On dit que la fonction f est impaire.
2. Trouver, à la calculatrice, les limites de la fonction f en -1 et en 1.
   Que peut on en conclure pour la courbe $y = f(x)$?
3. Montrer que : $f'(x) = \frac{2}{1-x^2}$ sur $]-1;1[$.
4. Dresser le tableau de variations de la fonction f .
5. Trouver l'équation de la tangente T_0 au point d'abscisse 0.
6. Tracer la tangente T_0 , les deux asymptotes verticales, et la courbe $y = f(x)$ dans un repère adapté.