

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Partie A - Restitution organisée de connaissances

Soient A, B deux points du plan d'affixes respectives a et b .

On rappelle que :

- * $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(b - a) + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.
- * L'image du point B par la rotation de centre A et d'angle θ est le point C défini par :

$$AC = AB \quad \text{et} \quad \text{si } A \neq B, \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \theta + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

Exprimer l'affixe c du point C en fonction de a, b et θ .

Partie B

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2 - 6z + 9 = 0$.

Dans la suite de l'exercice, on désigne par P, Q et R les points d'affixes respectives

$$z_P = \frac{3}{2}(1 + i), \quad z_Q = \frac{3}{2}(1 - i) \quad \text{et} \quad z_R = -2i\sqrt{3}.$$

2. Placer les points P, Q, R sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure de la résolution de l'exercice.
3. On note S le symétrique du point R par rapport au point Q .
Vérifier que l'affixe z_S du point S est $3 + i(2\sqrt{3} - 3)$.
4. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
Déterminer les affixes z_A et z_C des points A et C , images respectives des points R et S par la rotation r .
5. On désigne par B et D les images respectives des points S et R par la translation de vecteur $3\vec{v}$.
Calculer les affixes z_B et z_D des points B et D .
6. a. Démontrer que $\frac{z_C - z_P}{z_B - z_P} = i$.
 b. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

Partie A

Soit g la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = x - x \ln x.$$

1. Déterminer les limites de la fonction g en 0 et $+\infty$.
2. Montrer que g est dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ et que $g'(x) = -\ln x$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction g .

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{e^n}{n^n}$.

1. Conjecturer, à l'aide de la calculatrice :
 - a. le sens de variation de la suite (u_n) ;
 - b. la limite éventuelle de la suite (u_n) .
2. Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = \ln(u_n)$.
 - a. Montrer que $v_n = n - n \ln n$.
 - b. En utilisant la **Partie A**, déterminer le sens de variation de la suite (v_n) .
 - c. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
3. Montrer que la suite (u_n) est bornée.
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

$\mathbb{N}^*$: ensemble des entiers naturels non nuls

PARTIE A :

On définit :

- la suite (u_n) par : $u_0 = 13$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$.
- la suite (S_n) par : pour tout entier naturel n , $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$.

En déduire la limite de la suite (u_n) .

2. a. Déterminer le sens de variation de la suite (S_n) .
 b. Calculer S_n en fonction de n .
 c. Déterminer la limite de la suite (S_n) .

PARTIE B :

Étant donné une suite (x_n) , de nombres réels, définie pour tout entier naturel n , on considère la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=0}^n x_k$.

Indiquer pour chaque proposition suivante si elle est vraie ou fausse.

Justifier dans chaque cas.

Proposition 1 : si la suite (x_n) est convergente, alors la suite (S_n) l'est aussi.

Proposition 2 : les suites (x_n) et (S_n) ont le même sens de variation.

Dans le plan complexe on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = -2$, $b = 5i$ et $c = 4$ ainsi que les carrés ABIJ, AKLC et BCMN, extérieurs au triangle ABC, de centres respectifs S, T et U.

La figure est donnée en **annexe 2**.

1. Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. En déduire que le point J a pour affixe $-7 + 2i$.
On admettra que l'affixe du point K est $-2 - 6i$.
2. Justifier que les droites (BK) et (JC) sont perpendiculaires et que les segments [BK] et [JC] ont la même longueur. Calculer cette longueur.
3.
 - a. Calculer les affixes des points S et T.
 - b. Déterminer l'affixe du point U.
 - c. Démontrer que la droite (AU) est une hauteur du triangle STU.
4. Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{AU})$.
5. On admet que les droites (BK) et (JC) se coupent au point V d'affixe $v = -0,752 + 0,864i$.
 - a. Établir que les points A, V et U sont alignés.
 - b. Que représente la droite (AU) pour l'angle $\widehat{BVC}$?