Thème suites et géométrie des complexes

5 points

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & u_n - \ln\left(u_n^2+1\right) \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln\left(x^2+1\right).$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.

2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
En déduire que si $x \in [0\,;\,1]$ alors $f(x) \in [0\,;\,1]$.

Partie B

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n \in [0\,;\,1]$.

2. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

3. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. Déterminer sa limite.

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n}{3u_n+5} \end{cases}$

1. a. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $u_n > 0$.

   b. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} - u_n = \frac{-3u_n{}^2}{3u_n+5}$

   En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

   c. Justifier que la suite (u_n) est convergente.

   d. On note $\ell = \lim u_n$

   Justifier que ℓ est solution de l'équation $\ell = \frac{5\ell}{3\ell+5}$ et calculer ℓ.

2. Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \geq 0$ par $v_n = \frac{5}{u_n}$.

   a. Calculer v_0 , v_1 , v_2.

   b. Montrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison 3.

   c. Exprimer v_n en fonction de n.

   En déduire u_n en fonction de n.

   d. Retrouver alors que la suite (u_n) est convergente, ainsi que sa limite ℓ.

Suite 3

1. **Restitution organisée de connaissances**

   Démontrer à l'aide de la définition et des deux propriétés ci-dessous que si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, alors elles sont convergentes et elles ont la même limite.

   Définition : deux suites sont adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre est décroissante et la différence des deux converge vers 0.
   Propriété 1 : si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes avec (u_n) croissante et (v_n) décroissante alors pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant u_n$.
   Propriété 2 : toute suite croissante et majorée converge ; toute suite décroissante et minorée converge.

   Dans la suite de cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

2. Dans les cas suivants, les suites (u_n) et (v_n) ont-elles la même limite ? Sont-elles adjacentes ?
   Justifier les réponses.

   a. $u_n = 1 - 10^{-n}$ et $v_n = 1 + 10^{-n}$;

   b. $u_n = \ln(n+1)$ et $v_n = \ln(n+1) + \dfrac{1}{n}$;

   c. $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$.

Complexes 1

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité 1 cm.

a. Restitution organisée de connaissances

Pour $M \neq \Omega$, on rappelle que le point M' est l'image du point M par la rotation r de centre Ω et d'angle de mesure θ si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Omega M' & = & \Omega M & (1) \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}\ ;\ \overrightarrow{\Omega M'}\right) & = & \theta \text{ à } 2k\pi \text{ près } (k \in \mathbb{Z}) & (2) \end{array}\right.$$

   a. Soient z, z' et ω les affixes respectives des points M, M' et Ω.
   Traduire le relations (1) et (2) en termes de modules et d'arguments.

   b. En déduire l'expression de z' en fonction de z, θ et ω

b. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0.$$

On donnera les solutions sous forme algébrique.

c. Soient A et B les points d'affixes respectives $a = 2\sqrt{3} - 2\imath$ et $b = 2\sqrt{3} + 2\imath$.

   a. Écrire a et b sous forme exponentielle.

   b. Faire une figure et placer les points A et B.

   c. Montrer que OAB est un triangle équilatéral.

d. Soit C le point d'affixe $c = -8\imath$ et D son image par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.
Placer les points C et D.
Montrer que l'affixe du point D est $d = 4\sqrt{3} + 4\imath$.

e. Montrer que D est l'image du point B par une homothétie de centre O dont on déterminera le rapport.

f. Montrer que OAD est un triangle rectangle.

Complexes 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité : 1 cm).
On fera une figure que l'on complétera au fur et à mesure des questions.

On considère les points A, B, S et Ω d'affixes respectives $a = -2+4i$, $b = -4+2i$, $s = -5+5i$ et $\omega = -2+2i$.

Soit h l'homothétie de centre S et de rapport 3.
On appelle C l'image du point A par h et D l'image du point B par h.

1. **a.** Déterminer l'écriture complexe de h.

   b. Démontrer que le point C a pour affixe $c = 4+2i$ et que le point D a pour affixe $d = -2-4i$.
2. Démontrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
3. Démontrer que la droite (SΩ) est la médiatrice du segment [AB].
4. Soit P le milieu du segment [AC].

   a. Déterminer l'affixe p du point P.

   b. Démontrer que $\dfrac{\omega - p}{d - b} = -\dfrac{1}{2}i$. En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{BD}\ ;\ \overrightarrow{P\Omega}\right)$.
5. Soit Q le milieu du segment [BD].
   Que représente le point Ω pour le triangle PQS ?

Complexes 3

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.
Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure des questions.

a. Placer les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_A = -11+4i,\ z_B = -3-4i \quad \text{et} \quad z_C = 5+4i.$$

b. Calculer le module et un argument du quotient $\dfrac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$ et en déduire la nature du triangle ABC.

c. Soit E l'image du point C par la rotation $\mathscr{R}$ de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.
Montrer que l'affixe de E vérifie $z_E = -3 + \left(8\sqrt{2} - 4\right)i$.
Placer le point E.

d. Soit D l'image du point E par l'homothétie $\mathscr{H}$ de centre B et de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Montrer que D est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
Placer le point D .

e. **Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.**
Soit $\mathscr{D}$ la droite parallèle à la droite (EC) passant par le point D. On note F le point d'intersection de la droite $\mathscr{D}$ et de la droite (BC), I le milieu du segment [EC] et J le milieu du segment [DF].
Montrer que B, I et J sont alignés.

Suite 4

1. La suite u est définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27}$ pour tout entier naturel n.

   a. On a représenté dans un repère orthonormé direct du plan **en annexe**, la droite d'équation $y = \frac{1}{3}x + \frac{23}{27}$ et le point A de coordonnées $(2\,;\,0)$.
   Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite u.

   b. Démontrer que si la suite u est convergente alors sa limite est $\ell = \frac{23}{18}$.

   c. Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $u_n \geqslant \frac{23}{18}$.

   d. Étudier la monotonie de la suite u et donner sa limite.

2. a. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Démontrer que :

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) \text{ c'est-à-dire que } \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

   b. La suite v est définie par $v_n = 1,2777\cdots7$ avec n décimales consécutives égales à 7.
   Ainsi $v_0 = 1,2$, $v_1 = 1,27$ et $v_2 = 1,277$.
   En utilisant le **a** démontrer que la limite de la suite v est un nombre rationnel r (c'est-à-dire le quotient de deux entiers).

3. La suite u définie au 1 et la suite v sont-elles adjacentes ? Justifier.

Annexe suite 4