Probabilités

Probabilités 1

Les deux parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4}.
Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus.

PARTIE A

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0,99 (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0,97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.
On note V l'évènement « la personne est contaminée par le virus » et T l'évènement « le test est positif ».
$\overline{V}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les évènements contraires de V et T.

1. **a.** Préciser les valeurs des probabilités $P(V)$, $P_V(T)$, $P_{\overline{V}}(\overline{T})$.
   Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

   b. En déduire la probabilité de l'évènement $V \cap T$.
2. Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,049 2.
3. **a.** Justifier par un calcul la phrase :
   « Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée ».

   b. Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

PARTIE B

On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants.
On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10.

Probabilités 2

Dans cet exercice, tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Partie I :

On dispose d'un dé cubique A parfaitement équilibré possédant une face verte, deux faces noires et trois faces rouges.
Un jeu consiste à lancer deux fois de suite et de manière indépendante ce dé. On note à chaque lancer la couleur de la face obtenue.

1. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient noires.
2. Soit l'évènement C : « à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues sont de la même couleur ».
   Démontrer que la probabilité de l'évènement C est égale à $\frac{7}{18}$.
3. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient de couleurs différentes.
4. À l'issue d'un jeu, sachant que les deux faces obtenues sont de la même couleur, quelle est la probabilité pour que les deux faces obtenues soient vertes ?

Partie II :

On dispose d'un second dé cubique B équilibré présentant quatre faces vertes et deux faces noires. Le nouveau jeu se déroule de la manière suivante : on lance le dé B ;

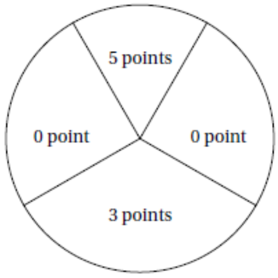
- si la face obtenue est verte, on lance à nouveau le dé B et on note la couleur de la face obtenue ;
- si la face obtenue est noire, on lance le dé A et on note la couleur de la face obtenue.

1. **a.** Construire un arbre de probabilités traduisant cette situation.

   b. Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer, sachant que l'on a obtenu une face verte au premier lancer ?
2. Montrer que la probabilité d'obtenir deux faces vertes est égale à $\frac{4}{9}$.
3. Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer ?

Probabilités 3

Un jeu consiste à lancer des fléchettes sur une cible. La cible est partagée en quatre secteurs, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



On suppose que les lancers sont indépendants et que le joueur touche la cible à tous les coups.

1. Le joueur lance une fléchette.
   On note p_0 la probabilité d'obtenir 0 point.
   On note p_3 la probabilité d'obtenir 3 points.
   On note p_5 la probabilité d'obtenir 5 points.
   On a donc $p_0 + p_3 + p_5 = 1$. Sachant que $p_5 = \frac{1}{2}p_3$ et que $p_5 = \frac{1}{3}p_0$ déterminer les valeurs de p_0, p_3 et p_5.
2. Une partie de ce jeu consiste à lancer trois fléchettes au maximum. Le joueur gagne la partie s'il obtient un total (pour les 3 lancers) supérieur ou égal à 8 points. Si au bout de 2 lancers, il a un total supérieur ou égal à 8 points, il ne lance pas la troisième fléchette.
   On note G_2 l'évènement : « le joueur gagne la partie en 2 lancers ».
   On note G_3 l'évènement : « le joueur gagne la partie en 3 lancers ».
   On note P l'évènement : « le joueur perd la partie ».
   On note $p(A)$ la probabilité d'un évènement A.
   a. Montrer, en utilisant un arbre pondéré, que $p(G_2) = \frac{5}{36}$.
   On admettra dans la suite que $p(G_3) = \frac{7}{36}$
   b. En déduire $p(P)$.
3. Un joueur joue six parties avec les règles données à la question 2.
   Quelle est la probabilité qu'il gagne au moins une partie ?
4. Pour une partie, la mise est fixée à 2 €.
   Si le joueur gagne en deux lancers, il reçoit 5 €. S'il gagne en trois lancers, il reçoit 3 €. S'il perd, il ne reçoit rien.
   On note X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur pour une partie. Les valeurs possibles pour X sont donc : -2, 1 et 3.
   a. Donner la loi de probabilité de X.
   b. Déterminer l'espérance mathématique de X. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Calculs d'intégrales

1. a. Etudier les variations de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = ln(x) + 1 - \frac{1}{x}$

b. En déduire le tableau de signes de la fonction f, puis la position des courbes $y = ln(x) + 1$ et $y = \frac{1}{x}$

c. Représenter les courbes $y = ln(x) + 1$ et $y = \frac{1}{x}$ dans un repère d'unité 2 cm.

d. Calculer, en u.a. du graphique, l'aire du domaine délimité par :

- Les courbes $y = ln(x) + 1$ et $y = \frac{1}{x}$
- les droites $x = \frac{1}{e}$ et $x = e$

Exprimer cette aire en cm².

2. Calculer : $1 - \frac{e^x}{1+e^x}$

En déduire la valeur moyenne, sur $[-1; 1]$, de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$.

Tracer la courbe graphique $y = f(x)$, dans un repère d'unité 2cm, et y faire apparaître la valeur moyenne.

3. Pour chaque fonction f suivante, calculer l'aire du domaine délimité par :

- la courbe $y = f(x)$ - l'axe des abscisses - les droites $x = -1$ et $x = 1$.

a. $f(x) = \frac{3x}{1+x^2}$ b. $f(x) = \frac{3x}{(1+x^2)^2}$ c. $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}}$

4. Calculer : $I = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt$.

Soit $J = \int_0^1 \frac{t^3}{1+t^2}dt$; calculer $I + J$; en déduire la valeur de J.