

EXERCICE 2**4 points****Commun à tous les candidats**

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère :

- les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations :

$$\mathcal{P} : x - y - z - 2 = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}' : x + y + 3z = 0.$$

- la droite $\mathcal{D}$ ayant pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -3 - 2t \\ y = 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et justifier la réponse. Une justification est attendue pour chaque réponse.

Proposition 1

La droite $\mathcal{D}$ est orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

Proposition 2

La sphère $\mathcal{S}$ de centre O et de rayon 2 est tangente au plan $\mathcal{P}$.

Proposition 3

L'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ est la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 1 - t' \\ y = -1 - 2t' \\ z = t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}.$$

Proposition 4

Les droites $\mathcal{D}$ et Δ sont coplanaires.

EXERCICE 3**4 points****Commun à tous les candidats**

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit $(\mathcal{P})$ le plan d'équation : $3x + y - z - 1 = 0$ et $(\mathcal{D})$ la droite dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 2t \\ z = -t + 2 \end{cases} \quad \text{où } t \text{ désigne un nombre réel.}$$

- Le point C(1 ; 3 ; 2) appartient-il au plan $(\mathcal{P})$? Justifier.
 - Démontrer que la droite $(\mathcal{D})$ est incluse dans le plan $(\mathcal{P})$.
- Soit $(\mathcal{Q})$ le plan passant par le point C et orthogonal à la droite $(\mathcal{D})$.
 - Déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{Q})$.
 - Calculer les coordonnées du point I, point d'intersection du plan $(\mathcal{Q})$ et de la droite $(\mathcal{D})$.
 - Montrer que $CI = \sqrt{3}$.
- Soit t un nombre réel et M_t le point de la droite $(\mathcal{D})$ de coordonnées $(-t + 1 ; 2t ; -t + 2)$.
 - Vérifier que pour tout nombre réel t , $CM_t^2 = 6t^2 - 12t + 9$.
 - Montrer que CI est la valeur minimale de CM_t lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels.

EXERCICE 1**5 points****Commun à tous les candidats**

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les plans P et Q d'équations respectives :

$$x + y + z = 0 \quad \text{et} \quad 2x + 3y + z - 4 = 0.$$

1. Montrer que l'intersection des plans P et Q est la droite D dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x &= -4 - 2t \\ y &= 4 + t \\ z &= t \end{cases} \quad \text{où } t \text{ est un nombre réel.}$$

2. Soit λ un nombre réel.

On considère le plan P_λ d'équation : $(1 - \lambda)(x + y + z) + \lambda(2x + 3y + z - 4) = 0$.

- Vérifier que le vecteur $\vec{n}(1 + \lambda; 1 + 2\lambda; 1)$ est un vecteur normal du plan P_λ .
 - Donner une valeur du nombre réel λ pour laquelle les plans P et P_λ sont confondus.
 - Existe-t-il un nombre réel λ pour lequel les plans P et P_λ sont perpendiculaires ?
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite D' , intersection des plans P et P_{-1} .
Montrer que les droites D et D' sont confondues.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
On considère le point $A(1; 1; 1)$.
Déterminer la distance du point A à la droite D , c'est-à-dire la distance entre le point A et son projeté orthogonal sur la droite D .

EXERCICE 4**4 points****Commun à tous les candidats**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer la position relative d'objets de l'espace

$\mathcal{P}$ est le plan passant par $A(3; 1; 2)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1; -4; 1)$;

$\mathcal{D}$ est la droite passant par $B(1; 4; 2)$ de vecteur directeur $\vec{u}(1; 1; 3)$.

$\mathcal{S}$ est la sphère de centre $\Omega(1; 9; 0)$ passant par A .

- Intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite $\mathcal{D}$.
 - Démontrer que le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne : $x - 4y + z - 1 = 0$.
 - Montrer que la droite $\mathcal{D}$ est strictement parallèle au plan $\mathcal{P}$.
- Intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la sphère $\mathcal{S}$.
 - Calculer la distance d du point Ω au plan $\mathcal{P}$.
 - Calculer le rayon de la sphère $\mathcal{S}$. En déduire l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la sphère $\mathcal{S}$.
- Intersection de la droite $\mathcal{D}$ et de la sphère $\mathcal{S}$.
 - Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.
 - Déterminer une équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$.
 - En déduire que la droite $\mathcal{D}$ coupe la sphère $\mathcal{S}$ en deux points M et N distincts dont on ne cherchera pas à déterminer les coordonnées.

Exercice 1

5 points

Commun à tous les candidats

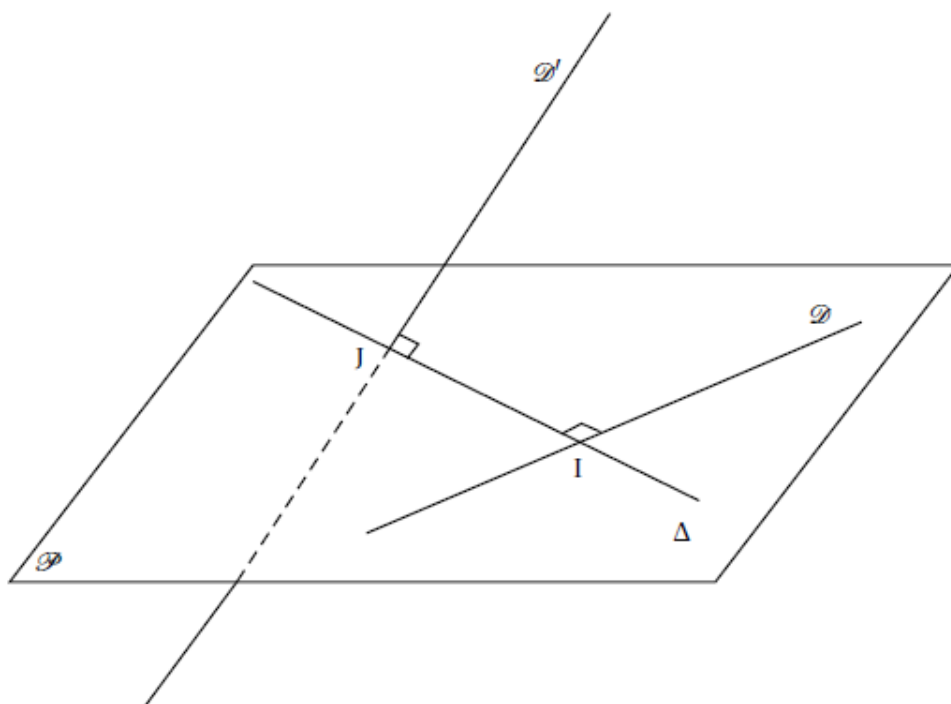
On admet que si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont deux droites non coplanaires, il existe une unique droite Δ perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Si Δ coupe $\mathcal{D}$ en le point I et $\mathcal{D}'$ en le point J, la distance IJ est appelée distance de $\mathcal{D}$ à $\mathcal{D}'$.

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On note $\mathcal{D}$ la droite des abscisses et $\mathcal{D}'$, la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 3+3t \\ z = 1-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

1. Justifier que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires.
2. On considère la droite Δ perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Prouver qu'il existe deux réels b et c tels que le vecteur $\vec{w} = b\vec{j} + c\vec{k}$ soit un vecteur directeur de Δ .
3.
 - a. Vérifier que le plan $\mathcal{P}$ d'équation : $-3y + z = 0$ est un plan contenant la droite $\mathcal{D}$.
 - b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection J de la droite $\mathcal{D}'$ et du plan $\mathcal{P}$.
 - c. Justifier que la droite passant par J, de vecteur directeur $\vec{w}$ est sécante à $\mathcal{D}$ en un point I et qu'elle est la perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
 - d. En déduire la distance de $\mathcal{D}$ à $\mathcal{D}'$.



EXERCICE 4

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.On considère les points $A(-2; 0; 1)$, $B(1; 2; -1)$ et $C(-2; 2; 2)$.

1. a. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ puis les longueurs AB et AC.
 b. En déduire une valeur approchée arrondie au degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.
 c. En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $2x - y + 2z + 2 = 0$.
3. Soient $\mathcal{P}_1$, et $\mathcal{P}_2$ les plans d'équations respectives $x + y - 3z + 3 = 0$ et $x - 2y + 6z = 0$.
 Montrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants selon une droite $\mathcal{D}$ dont un système d'équations paramétriques est
$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 + 3t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$
4. Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ et le plan (ABC) sont sécants et déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.
5. Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre $\Omega(1; -3; 1)$ et de rayon $r = 3$.
 a. Donner une équation cartésienne de la sphère $\mathcal{S}$.

Dans les deux questions suivantes, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

- b. Étudier l'intersection de la sphère $\mathcal{S}$ et de la droite $\mathcal{D}$.
- c. Démontrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère $\mathcal{S}$.

EXERCICE 3

5 points

Commun à tous les candidats

On considère un cube $ABCDEFGH$, d'arête de longueur 1. On note I le point d'intersection de la droite (EC) et du plan (AFH).

1. On se place dans le repère $(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$.

Dans ce repère, les sommets du cube ont pour coordonnées :

$A(1; 0; 0) B(1; 1; 0) C(0; 1; 0) D(0; 0; 0) E(1; 0; 1) F(1; 1; 1) G(0; 1; 1) H(0; 0; 1)$

- a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC).
 - b. Déterminer une équation cartésienne du plan (AFH).
 - c. En déduire les coordonnées du point I, puis montrer que le point I est le projeté orthogonal du point E sur le plan (AFH).
 - d. Vérifier que la distance du point E au plan (AFH) est égale à $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
 - e. Démontrer que la droite (HI) est perpendiculaire à la droite (AF).
 Que représente le point I pour le triangle AFH?
2. Dans la suite de cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Définitions :

- un tétraèdre est dit de type 1 si ses faces ont même aire;
- il est dit de type 2 si les arêtes opposées sont orthogonales deux à deux;
- il est dit de type 3 s'il est à la fois de type 1 et de type 2.

Préciser de quel(s) type(s) est le tétraèdre EAFH.