Exercices complexes Bac

10 Nouvelle-Calédonie novembre 2010

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.
On considère les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_A = -2i, \quad z_B = -\sqrt{3} + i \text{ et } z_C = \sqrt{3} + i.$$

1. **a.** Écrire z_A, z_B et z_C sous forme exponentielle.
   b. En déduire le centre et le rayon du cercle Γ passant par les points A, B et C.
   c. Faire une figure et placer le point A, tracer le cercle Γ puis placer les points B et C.
2. **a.** Écrire le quotient $\dfrac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.
   b. En déduire la nature du triangle ABC .
3. On note r la rotation de centre A et d'angle mesurant $\dfrac{\pi}{3}$ radians.
   a. Montrer que le point O′, image de O par r, a pour affixe $-\sqrt{3} - i$.
   b. Démontrer que les points C et O′ sont diamétralement opposés sur le cercle Γ.
   c. Tracer l'image Γ' du cercle Γ par la rotation r.
   d. Justifier que les cercles Γ et Γ' se coupent en A et B.
4. **a.** Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que

$$|z| = \left|z + \sqrt{3} + i\right|.$$

   b. Montrer que les points A et B appartiennent à (E).

8 Amérique du Nord mai 2011

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère les points A et B d'affixes respectives : $a = i$ et $b = 1 + i$.
On note : r_A la rotation de centre A, d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, r_B la rotation de centre B, d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et r_O la rotation de centre O, d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

Partie A

On considère le point C d'affixe $c = 3i$. On appelle D l'image de C par r_A, G l'image de D par r_B et H l'image de C par r_O.
On note d, g et h les affixes respectives des points D, G et H.

1. Démontrer que $d = -2 + i$.
2. Déterminer g et h.
3. Démontrer que le quadrilatère CDGH est un rectangle.

Partie B

On considère un point M, distinct de O et de A, d'affixe m. On appelle N l'image de M par r_A, P l'image de N par r_B et Q l'image de M par r_O.
On note n, p et q les affixes respectives des points N, P et Q.

1. Montrer que $n = im + 1 + i$. On admettra que $p = -m + 1 + i$ et $q = -im$.
2. Montrer que le quadrilatère $MNPQ$ est un parallélogramme.
3. **a.** Montrer l'égalité : $\dfrac{m-n}{p-n} = i + \dfrac{1}{m}$.
   b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Déterminer l'ensemble (Γ) des points M tels que le quadrilatère $MNPQ$ soit un rectangle.