Fonction ln

1. Fonction réciproque de $x \xrightarrow{exp} e^x$

$\boldsymbol{exp}:]-\infty;+\infty[\xrightarrow{exp}]0;+\infty[$ **donc** $\boldsymbol{ln}:\ ]0;+\infty[\xrightarrow{ln}]-\infty;+\infty[$

$x \xrightarrow{exp} e^x \xrightarrow{ln} x : ln\,(e^x) = x$ pour tout x $\qquad$ $x \xrightarrow{ln} ln\,(x) \xrightarrow{exp} x : e^{\ln(x)} = x$ pour tout $x > 0$

Exemples de valeurs : $e^{ln\,(2)} = 2$ $\qquad$ $ln(e^5) = 5$ $\qquad$ $l\,n(1) = 0$ $\qquad$ $l\,n(e) = 1$

$l\,n(e^3) = 3$ $\qquad$ $e^{2+ln(8)} = 8e^2$ $\qquad$ $e^{-\,ln(3)} + e^{ln\frac{2}{3}} = 1$

2. Propriétés

P1 : $ln(ab) = lna + lnb$ pour tout $a > 0, b > 0$

Démonstration : comparaison $e^{\ln(ab)}$ et $e^{lna+lnb}$

$e^{\ln(ab)} = ab$ et $e^{lna+lnb} = e^{lna}e^{lnb} = ab$, donc $e^{\ln(ab)} = e^{lna+lnb}$, et donc et $\ln(ab) = lna + lnb$

Commentaire : exp transforme une somme en un produit, *ln* transforme un produit en une somme

Exemples : $a = ln(15)$ $\qquad$ $f(x) = ln\,[x(x-2)]$

P2 : Pour $a > 0$, $ln(a^n) = nlna$ pour tout entier naturel *n*

Démonstration par récurrence à partir de P1 : $ln(a^{n+1}) = \ln(a^n \times a)$

Exemples : $a = ln\,(24)$ $\qquad$ $b = \ln(450)$

P3 : $ln\frac{a}{b} = lna - lnb$, pour tout $a > 0, b > 0$

Démonstration à partir de P1 : $lna = \ln\left(\frac{a}{b} \times b\right) = ln\frac{a}{b} + lnb$

Cas particulier de P3 : $ln\frac{1}{a} = -lna$

Exemples : : $a = ln\,\frac{25}{9}$ $\qquad$ $f(x) = ln\left(\frac{1-x}{x+2}\right)$

P4 : $ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}lna$, pour tout $a > 0$

Démonstration à partir de P2 : $lna = ln\,(\sqrt{a})^2$

Exemples : $a = ln(\sqrt{32})$ $\qquad$ $b = ln(\sqrt{\frac{27}{50}})$

3. Fonction ln

Dérivée de ln: La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $ln'(x) = \frac{1}{x}$

Démonstration : On admet que la fonction ln est dérivable.

En dérivant $e^{\ln(x)} = x$: pour tout $x > 0$, $ln'(x) \times e^{\ln(x)} = 1$, et donc $ln'(x) = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$

Tableau des variations :

x	0		1		$+\infty$
$ln'(x)$	‖	+			
$ln\,(x)$	‖	↗	0	↗	

Tableau de signes :

x	0		1		$+\infty$
$ln\,(x)$	‖	−	0	+	

Utilisation de la croissance :

La fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$:

$$lna = lnb \underset{\text{équivaut à}}{\Longleftrightarrow} a = b \qquad lna < lnb \underset{\text{équivaut à}}{\Longleftrightarrow} a < b$$

Exemples d'équations et d'inéquations :

$l\,n(1-2x)=0$ $\quad l\,n(x+5)=1$ $\quad \ln(x)>3$ $\quad e^{2x-3}\leq 5$

Limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} ln(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} ln(x)=-\infty$

Démonstration :

► $M>0$ étant donné, pour $x>e^M$ on a $\ln(x)>M$; on a donc bien $\lim\limits_{x\to+\infty} ln(x)=+\infty$

► $ln\,x=-\ln\frac{1}{x}$ pour tout $x>0$

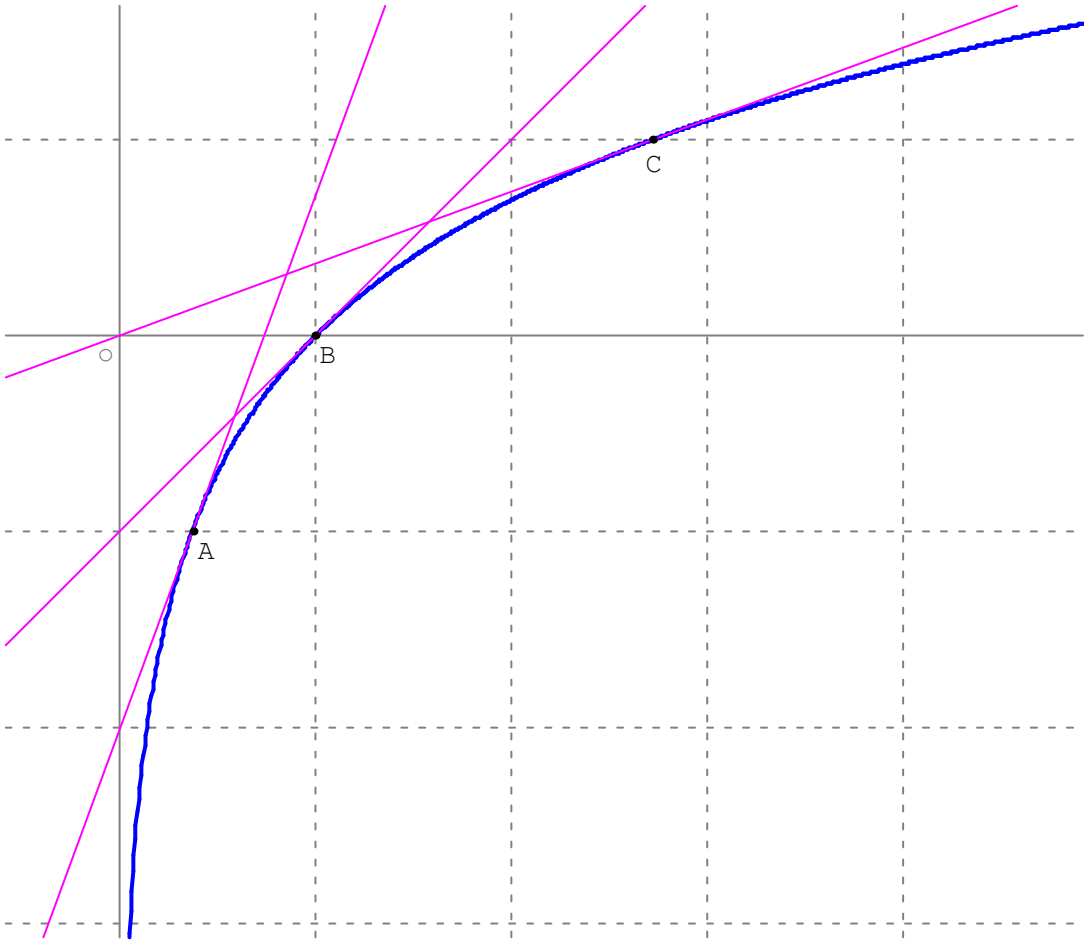
$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} ln(x)=+\infty$, donc par composition : $\lim\limits_{x\to 0^+} ln\frac{1}{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[-ln\frac{1}{x}\right]=-\infty$

On a donc bien : $\lim\limits_{x\to 0^+} ln(x)=-\infty$

Courbe $y=lnx$ et tangentes

Tangente en $A\left(\frac{1}{e};-1\right)$: $ln'\frac{1}{e}=e$ $\quad y=e\left(x-\frac{1}{e}\right)-1$ $\quad y=ex-2$

Tangente en $B(1;0)$: $ln'1=1$ $\quad y=1(x-1)+0$ $\quad y=x-1$

Tangente en $C(e;1)$: $ln'e=\frac{1}{e}$ $\quad y=\frac{1}{e}(x-e)+1$ $\quad y=\frac{1}{e}x$

Courbe :