Probabilités discrètes

Loi de Bernoulli

B1. Dans une urne, il y a 8 jetons jaunes et 7 jetons rouges indiscernables au toucher.

On tire au hasard successivement et sans remise 2 jetons de l'urne.

1. Trouver la probabilité de l'évènement E: « tirer successivement une jaune, puis une rouge ».

2. On répète 4 fois cette épreuve en remettant, après chaque épreuve, les deux jetons dans l'urne.

X est la variable aléatoire qui, à chaque partie de 4 épreuves, associe le nombre de fois où E se produit.

Trouver la loi de X et son espérance mathématique.

B2. On considère que, pour un concours donné, un candidat a statistiquement 20 % de chances de réussir.

On prend un groupe quelconque de 25 candidats.

Quelle est la probabilité qu'au moins un candidat réussisse ? qu'un seul candidat réussisse ? que deux candidats réussissent ? qu'au plus deux candidats réussissent ? que dix candidats réussissent ?

Calculer le nombre moyen de candidats qui réussissent, sur 25 qui passent le concours.

Probabilités avec dénombrements

D1. Une urne contient 18 jetons : 8 rouges numérotés de 1 à 8 et 10 verts numérotés de 1 à 10.

On tire au hasard successivement et sans remise trois jetons de l'urne.

Calculer la probabilité des évènements :

A : « les 3 jetons tirés sont rouges »

B : « le 2^{ème} jeton tiré est rouge »

C : « le 2^{ème} jeton est rouge et le 3^{ème} porte le numéro 5 »

D : « le 1^{er} et le 3^{ème} sont verts, le 2^{ème} porte le numéro 7 »

D2. Une urne contient 6 boules bleues, 3 boules rouges et 2 boules vertes indiscernables au toucher.

On tire simultanément 3 boules de l'urne.

1. Calculer la probabilité des évènements suivants :

A : « les boules sont toutes de couleurs différentes ».

B : « Les boules sont toutes de même couleur ».

2. Soit X la variable aléatoire qui à tout tirage associe le nombre de boules rouges .

Trouver la loi de X et son espérance.

D3. On écrit les 26 lettres de l'alphabet sur 26 cartons et on les place dans un sac.

On tire au hasard simultanément 6 cartons.

Déterminer la probabilité des évènements :

- A : « le tirage contient les lettres P et C »

- B : « le tirage ne contient ni P, ni C »

- C : « le tirage contient autant de voyelles que de consonnes »

- D : « le tirage contient au moins deux consonnes »

- E : « le tirage contient au moins une consonne et au moins une voyelle ».

D4. Lors d'un recrutement un chef d'entreprise doit choisir 5 personnes parmi 21 candidats dont 13 femmes et huit hommes.

En supposant qu'il choisisse au hasard, quelle est la probabilité qu'il choisisse :

- deux femmes et trois hommes

- au moins une femme

- au moins une personne de chaque sexe.

11 Amérique du Sud novembre 2009

[Retour au tableau](#)

On considère un questionnaire comportant cinq questions.

Pour chacune des cinq questions posées, trois propositions de réponses sont faites (A , B et C), une seule d'entre elles étant exacte.

Un candidat répond à toutes les questions posées en écrivant un mot réponse de cinq lettres.

Par exemple, le mot « $BBAAC$ » signifie que le candidat a répondu B aux première et deuxième questions, A aux troisième et quatrième questions et C à la cinquième question.

- Combien y-a-t-il de mots-réponses possible à ce questionnaire ?
 - On suppose que le candidat répond au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.

Calculer la probabilité des évènements suivants :

E : « le candidat a exactement une réponse exacte ».

F : « le candidat n'a aucune réponse exacte ».

G : « le mot-réponse du candidat est un palindrome ». (On précise qu'un palindrome est un mot pouvant se lire indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche : par exemple, « $BACAB$ » est un palindrome).

- Un professeur décide de soumettre ce questionnaire à ses 28 élèves en leur demandant de répondre au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.

On désigne par X le nombre d'élèves dont le mot-réponse ne comporte aucune réponse exacte.

- Justifier que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 28$ et $p = \frac{32}{243}$.
- Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-2} , qu'au plus un élève n'ait fourni que des réponses fausses.

6 Antilles-Guyane 18 juin 2010

[Retour au tableau](#)

Pour chacune des questions suivantes, **une ou deux des réponses proposées sont correctes.**

Un point est attribué à chacune des questions. Toute réponse inexacte est pénalisée de 0,25 point.

Il n'y a pas de pénalité en cas d'absence de réponse. Aucune justification n'est attendue.

Si le total des points obtenus est négatif, le note attribuée à l'exercice est 0.

Recopier le numéro de la question et la ou les réponses correctes (deux au maximum).

- On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes.

La probabilité de n'obtenir ni un as, ni un pique, est égale à :

$$\text{A: } \frac{5}{8} \qquad \text{B: } \frac{21}{32} \qquad \text{C: } \frac{11}{32} \qquad \text{D: } \frac{3}{8}$$

- On tire au hasard et simultanément deux cartes d'un jeu de 32 cartes.

La probabilité de n'obtenir ni un as, ni un pique, est égale à :

$$\text{A: } \frac{105}{248} \qquad \text{B: } \frac{\binom{21}{2}}{\binom{32}{2}} \qquad \text{C: } \frac{21^2}{32^2} \qquad \text{D: } \frac{5^2}{8^2}$$

- On suppose que la durée d'attente à un guichet de service, exprimée en heure, suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

La probabilité que la durée d'attente d'une personne prise au hasard soit comprise entre 15 min et 20 min est :

$$\text{A: } \frac{1}{3} \qquad \text{B: } \frac{1}{5} \qquad \text{C: } \frac{1}{12} \qquad \text{D: } \frac{1}{4}$$

- On considère 10 appareils identiques, de même garantie, fonctionnant indépendamment les uns des autres. La probabilité pour chaque appareil de tomber en panne durant la période de garantie est égale à 0,15.

La probabilité pour qu'exactly 9 appareils soient en parfait état de marche à l'issue de la période de garantie est égale à :

$$\text{A: } 0,35 \text{ à } 10^{-2} \text{ près} \qquad \text{B: } 0,85^9 \qquad \text{C: } 0,85^9 \times 0,15 \qquad \text{D: } 0,85^9 \times 0,15 \times 10$$

9 Pondichéry avril 2010

[Retour au tableau](#)

Une urne contient 10 boules blanches et n boules rouges, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On fait tirer à un joueur des boules de l'urne. À chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 euros et pour chaque boule rouge tirée, il perd 3 euros.

On désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu par le joueur.

Les trois questions de l'exercice sont indépendantes.

1. Le joueur tire deux fois successivement et sans remise une boule de l'urne.

a. Démontrer que : $P(X = -1) = \frac{20n}{(n+10)(n+9)}$.

b. Calculer, en fonction de n la probabilité correspondant aux deux autres valeurs prises par la variable X .

c. Vérifier que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X vaut :

$$E(X) = \frac{-6n^2 - 14n + 360}{(n+10)(n+9)}.$$

d. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'espérance mathématique est strictement positive.

2. Le joueur tire 20 fois successivement et avec remise une boule de l'urne. Les tirages sont indépendants. Déterminer la valeur minimale de l'entier n afin que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge au cours de ces 20 tirages soit strictement supérieure à 0,999.

3. On suppose que $n = 1000$. L'urne contient donc 10 boules blanches et 1000 boules rouges.

Le joueur ne sait pas que le jeu lui est complètement défavorable et décide d'effectuer plusieurs tirages sans remise jusqu'à obtenir une boule blanche.

Le nombre de boules blanches étant faible devant celui des boules rouges, on admet que l'on peut modéliser le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche par une variable aléatoire Z suivant la loi :

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, p(Z \leq k) = \int_0^k 0,01e^{-0,01x} dx.$$

On répondra donc aux questions suivantes à l'aide de ce modèle.

a. Calculer la probabilité que le joueur ait besoin de tirer au plus 50 boules pour avoir une boule blanche, soit $P(Z \leq 50)$.

b. Calculer la probabilité conditionnelle de l'évènement : « le joueur a tiré au maximum 60 boules pour tirer une boule blanche » sachant l'évènement « le joueur a tiré plus de 50 boules pour tirer une boule blanche ».