QUELLE REDACTION POUR LA RECHERCHE DE SOLUTIONS DE L'EQUATION f(x)=k ?

Quelques extraits des programmes

Contenus	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Théorème (dit des *valeurs intermédiaires*) : "soient f une fonction définie et continue sur un intervalle I et a et b deux réels dans I. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel c compris entre a et b tel que $f(c)=k$ "	"si f est une fonction continue strictement monotone sur $[a,b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b$, l'équation $f(x)=k$ a une solution unique dans $[a,b]$". On pourra approcher la solution de l'équation $f(x)=k$ par dichotomie ou balayage avec la calculatrice ou le tableur.	On conviendra, dans les tableaux de variation, que les flèches obliques de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré. Dans la rédaction de la solution à un problème, une simple référence au tableau de variations suffira pour justifier l'existence et l'unicité d'une solution d'une équation du type : $f(x)=k$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=4x^3-3x^2-2$.

1) Etudier les variations de f sur son domaine de définition. (on ne demande pas le calcul des limites)
2) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution réelle unique notée α et que cette solution appartient à l'intervalle $[1;2]$.
3) A l'aide de la calculatrice donner un encadrement de α d'amplitude $0{,}01$.
4) En déduire le signe de $f(x)$ sur IR.

Proposition de rédaction

1) $f(x)=4x^3-3x^2-2$ Pour tout réel x on a : $f'(x)=12x^2-6x=6x(2x-1)$

On obtient alors le tableau suivant :

valeurs de x	$-\infty$		0		$0{,}5$	1	α	2		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0				$+$	
variations de f		↗	-2	↘	$-2{,}25$	-1	0	18	↗	

D'après le tableau de variations **complété :**

- Sur $]-\infty;1]$ le maximum de f est $-1<0$ donc l'équation $f(x)=0$ n'a pas de solution.
- Sur $[1;2]$ l'équation $f(x)=0$ a une solution unique α
- Sur $[2;+\infty[$ le minimum de f est $18>0$ donc l'équation $f(x)=0$ n'a pas de solution.

Conclusion : l'équation $f(x)=0$ admet bien une seule solution réelle et cette solution appartient à l'intervalle $[1;2]$.

3) On effectue un balayage de l'intervalle $[1;2]$ à l'aide de la calculatrice

- Avec un pas de $0{,}1$: $f(1{,}1)=-0{,}306$ et $f(1{,}2)=-0{,}592$, donc : $1{,}1<\alpha<1{,}2$
- Avec un pas de $0{,}01$: $f(1{,}13)=-0{,}0591$ et $f(1{,}14)=0{,}02738$, donc, $\boxed{1{,}13<\alpha<1{,}14}$

4) Signe de $f(x)$: D'après le tableau de variations complété :

valeurs de x	$-\infty$		α		$+\infty$
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	