On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;\,6[$ par :

$$f(x) = \frac{9}{6-x}$$

On définit, pour tout entier naturel n, la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 &= -3 \\ u_{n+1} &= f(u_n) \end{cases}$$

1. La courbe représentative de la fonction f est donnée annexe et est accompagnée de celle de la droite d'équation $y = x$. Construire, sur ce document, les points $M_0\,(u_0\,;\,0)$, $M_1\,(u_1\,;\,0)$, $M_2\,(u_2\,;\,0)$, $M_3\,(u_3\,;\,0)$ et $M_4\,(u_4\,;\,0)$.
   Quelles conjectures peut-on formuler en ce qui concerne le sens de variation et la convergence éventuelle de la suite (u_n) ?
2. a. Démontrer que si $x < 3$, alors $\dfrac{9}{6-x} < 3$.
   En déduire que $u_n < 3$ pour tout entier naturel n.

   b. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

   c. Que peut-on déduire des questions 2. a. et 2. b. ?
3. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$ pour tout entier naturel n.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

   b. Déterminer v_n puis u_n en fonction de n.

   c. Calculer la limite de la suite (u_n).

Annexe